

## Аналітичне дослідження автобалансування у рамках плоскої моделі ротора і автобалансира з одним вантажем

Г. Б. Філімоніхін, Л. С. Олійніченко, Г. Страутманіс, А. П. Галєєва,  
В. А. Грубань, О. В. Лисенко, М. Мезітіс, І. А. Валявський

*Аналітично знайдені умови настання автобалансування у рамках плоскої моделі ротора на ізотропних пружно-в'язких опорах и автобалансира з одним вантажем. Ротор статично незрівноважений, вісь обертання – вертикальна. Автобалансира має один вантаж – маятник, кулю чи ролик. Балансувальна ємність вантажу дорівнює незрівноваженості ротора.*

*Описана фізико-математична модель системи. Записані диференціальні рівняння руху у безрозмірному вигляді щодо системи координат, що синхронно обертається з ротором. Знайдений так званий основний рух – у ньому вантаж синхронно обертається разом з ротором і балансує його. Диференціальні рівняння руху лінеаризовані в околі основного руху. Складене характеристичне рівняння. По ньому досліджена стійкість основного руху (режиму автобалансування) у випадках відсутності і наявності сил опору в системі.*

*Встановлено, що за відсутністю сил опору в системі:*

- у ротора існують три характерні швидкості обертання, причому перша завжди співпадає з резонансною частотою;*
- автобалансування настає при обертанні ротора з швидкостями, що знаходяться між першою і другою, та над третьою характерними швидкостями;*
- на величини другої і третьої характерних швидкостей істотно впливає співвідношення маси вантажу до маси системи;*
- друга і третя характерні швидкості монотонно зростають із зростанням відношення маси вантажу до маси системи.*

*Сили опору істотно впливають як на величини другої і третьої характерної швидкостей, так і на умови їх існування. Малі сили опору не змінюють якісної поведінки системи. При великих силах опору кількість характерних швидкостей зменшується до однієї.*

*Одержані результати застосовні для автобалансира з багатьма вантажами, коли він балансує незрівноваженість, що дорівнює балансувальній ємності автобалансира.*

*Ключові слова: пасивний автобалансира, ротор, автоматичне балансування, статичне балансування, стійкість руху, статична незрівноваженість.*

### 1. Вступ

Для використання пасивних автобалансирів для автоматичного балансування на ходу швидкообертючих роторів необхідне глибоке теоретичне вивчення явища автобалансування [1–15]. Найбільш загальну інформацію дають результати аналітичних досліджень [2–15]. Через велику кількість степенів віль-

ності автобалансувальної системи аналітично дослідити процес автобалансування надзвичайно складно. Тому часто у дослідженнях аналітично виводяться диференціальні рівняння руху системи, а подальші дослідження проводяться числовими методами. Але при цьому одержуються результати, що не мають загального характеру.

Альтернативою є розв'язання низки так званих модельних задач. З одного боку це повинні бути дещо спрощені моделі роторних систем з автобалансирами, які можна відносно глибоко дослідити аналітично. З іншого боку, результати розв'язання модельних задач повинні допускати розповсюдження на більш складні роторні системи з автобалансирами.

Нижче досліджується стійкість режиму автобалансування в рамках плоскої моделі статично незрівноваженого ротора на ізотропних пружно-в'язких опорах. Ротор балансує кульовий, роликовий чи маятниковий автобалансир з одним вантажем. Це – модельна задача. Вона відрізняється не тільки відносною математичною простотою, але і можливістю застосування одержаних результатів для автобалансирів з багатьма вантажами. Так, у випадку найбільшої незрівноваженості ротора вантажі в автобалансири з багатьма вантажами збираються разом і вибудовуються навпроти незрівноваженості. При цьому умовно утворюється один складений вантаж.

Отже, розв'язання зазначеної модельної задачі важливо як для побудови аналітичної теорії пасивного автобалансування, так і для практики при проектуванні цих пристроїв для конкретних роторів.

## **2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми**

Конструкція, принцип дії і приклади застосування кільцевих, маятникових, кульових (роликових) автобалансирів описана в [1]. В [2] в рамках плоскої моделі ротора на ізотропних пружних опорах і двохкульового автобалансира виявлені усталені рухи, на яких кулі синхронно обертаються з ротором. Сили опору не враховувалися. Виявлено існування одного основного руху – на якому кулі балансують ротора і трьох побічних – на яких ротор розбалансований. На першому побічному русі кулі знаходяться з важкого боку ротора, на другому – з легкого, а на третьому – одна куля з важкого, а інша – легкого боку ротора. Із застосуванням енергетичного підходу встановлено, що на дорезонансних швидкостях обертання ротора стійким є перший побічний рух, а на зарезонансних – основний рух. В [3] аналогічний результат отриманий з застосуванням наближеного методу – синхронізації динамічних систем. За результатами робіт [2, 3] складається уявлення, що створена повна біфуркаційна теорія для розглядуваної моделі ротора і автобалансира. За результатами цієї теорії коли основний рух стійкий, то побічні – нестійкі. Це дозволяє не досліджувати стійкість побічних рухів, а концентруватися на дослідженні стійкості основного руху. В [4] розглядалася модель ротора на ізотропних пружно-в'язких опорах і двохкульового автобалансира. Руху куль відносно автобалансира перешкоджають сили в'язкого опору. Досліджувалася стійкість основного руху у малому – першим методом Ляпунова за рівняннями першого наближення. Було одержано характеристичне рівняння у вигляді полінома 8-й степені. Через значну кіль-

кість параметрів і високу степінь поліному дослідження проведені як аналітично в деяких частинних випадках, так і числовими методами. За розкладанням коренів за степенями малого параметра (при певних незрівноваженостях) встановлено, що автобалансування наставатиме на зарезонансних швидкостях обертання ротора. Числовими методами було встановлене, що на області настання автобалансування впливає як незрівноваженість ротора (автобалансувальні положення куль в автобаланси́рі), так і сили в'язкого опору.

В роботі [5] були виявлені нові режими усталених рухів ротора з (маятниковим) автобалансиром – режими застрягання вантажів. Ці режими викликані ефектом Зомерфельда [6] і виникають при невеликих силах опору в системі. За результатами роботи [5] в нових режимах руху вантажі застряють на одній з резонансних частот обертання ротора.

Слід відзначити, що існує багато робіт, в яких аналітично і числовими методами досліджувались різні режими руху ротора і автобаланси́ра з двома кулями, роликками чи маятниками. Аналітично стійкість основного руху найбільш повно досліджена в роботі [7], де використовувалися методи і підходи роботи [4]. Були знайдені розкладання коренів характеристичного рівняння, та характерних швидкостей (при переході яких настає чи втрачається автобалансування) при різних співвідношеннях малості між параметрами системи. Було встановлено, що характерні швидкості монотонно (і стрімко) зростають із зростанням відношення маси вантажів до маси системи.

Найбільш повно числовими методами досліджена стійкість основного, побічних рухів і режимів застрягання в роботі [8]. В роботі [9] чисельними методами досліджувався вплив в'язких сил опору на швидкість настання автобалансування. Аналітично наближеними методами режими застрягання вантажів (двох маятників) досліджені в [10]. В [11] переважно числовими методами досліджені режими застрягання в двохкульовому автобаланси́рі.

Спільними недоліками проведених у [1–11] досліджень є побудова теорії для автобаланси́рів з двома вантажами, недостатня глибина аналітичного розв'язання задач. Також теорія будується окремо для кульових і маятникових автобаланси́рів.

В роботі [12] було одержане характеристичне рівняння, за яким визначається стійкість основних рухів при балансуванні ротора багатокульовим автобаланси́ром. В роботі [13] були аналітично досліджені основні, побічні усталені рухи і режими застрягання вантажів для випадку автобаланси́ра з багатьма вантажами. У якості узагальнених координат бралися координати ротора і параметри сумарної незрівноваженості ротора.

Слід відзначити, що навіть у випадку автобаланси́ра з двома вантажами задачі занадто складні і громіздкі для аналітичного розв'язання. Для подолання цих труднощів в деяких дослідженнях розв'язувалися модельні задачі. Так, явище застрягання одного маятника досліджувалося наближеними методами в [14]. Було встановлено, що маятник застрягає на одній з резонансних частот коливань ротора. Одержаний результат застосовний для автобаланси́рів з багатьма вантажами. Це пояснюється тим, що при застряганні вантажі щільно притиснуті один до одного і обертаються разом щодо ротора як один умовний ван-

таж. Але це стосується тільки умов існування і стійкості режиму застрягання. У автобалансира з багатьма вантажами складений вантаж може розпадатися і через це існують інші усталені рухи (побічні, основні). Недоліком проведеного дослідження є розв'язання задачі наближеними методами. Через це не всі можливі режими застрягання були знайдені.

В [15] аналітичними методами досліджене явище застрягання кулі (ролика, маятника) у рамках плоскої моделі зрівноваженого ротора на ізотропних опорах. Аналітично було встановлено, що у системи існують тільки такі усталені режими руху, у яких (один) вантаж застрягає. Для конкретної швидкості обертання ротора можуть існувати одна чи три кутові швидкості застрягання. Стійкими ж можуть бути тільки непарні швидкості, якщо їх пронумерувати в порядку зростання. Результати робіт [14, 15] показують на доцільність використання модельних задач при побудові аналітичної теорії пасивних автобалансирів.

За результатами робіт [7, 13] можна зробити висновок, що автобалансир буде балансувати будь-яку незрівноваженість, якщо він буде балансувати максимальну і мінімальну незрівноваженості. При найбільшій незрівноваженості вантажі збираються разом, переходять в легкий бік ротора і утворюють там умовний складений вантаж. Це можна змодельовати автобалансиром з одним вантажем. На сьогодні аналітично задача про балансування ротора автобалансиром з одним вантажем ще не розв'язана.

### **3. Мета і завдання дослідження**

Метою дослідження є аналітичне дослідження стійкості режиму автобалансування (стійкості основного руху) у рамках плоскої моделі ротора на ізотропних пружних опорах і автобалансира з одним вантажем. Це важливо як для побудови аналітичної теорії пасивного автобалансування, так і для практики при проектуванні цих пристроїв для конкретних роторів.

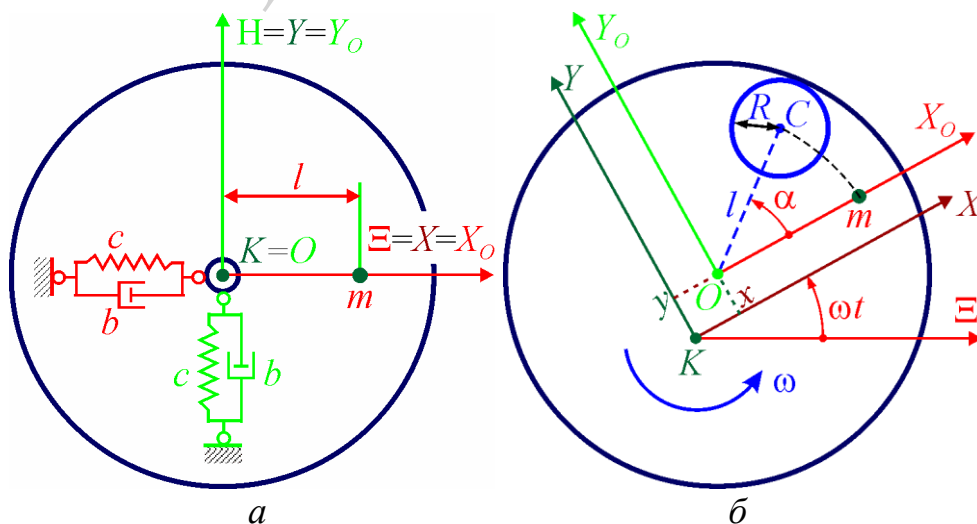
Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

- математично поставити задачу дослідження стійкості режиму автобалансування;
- знайти умови стійкості режиму автобалансування за відсутністю сил опору в системі;
- виявити вплив сил опору на стійкість режиму автобалансування.

### **4. Методи дослідження стійкості режиму автобалансування**

У теоретичних дослідженнях використовуються елементи теорії автоматичного балансування роторів [13], класичної механіки [16], теорії стійкості рухів механічних систем [17].

Стійкість режиму автобалансування досліджується першим методом Ляпунова з використанням рівнянь першого наближення [13, 17]. При цьому складається характеристичне рівняння. Через високий порядок відповідного полінома у дослідженнях використовується метод розкладання коренів полінома за степенями малого параметра [18]. При цьому розглядаються різні співвідношення малості між параметрами системи. Більш докладно методи досліджень розкриваються при розв'язанні поставлених задач досліджень.



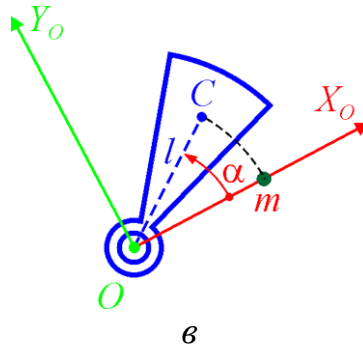


Рис. 1. Плоска модель ротора і автобалансира [13, 14]: а – статично незрівноважений ротор на ізотропних пружно-в'язких опорах; б – рух ротора і кулі (ролика); в – рух маятника

Механічна система має таку масу і резонансну частоту

$$M_{\Sigma} = M + 2m, \quad \omega_0 = \sqrt{c / M_{\Sigma}}. \quad (1)$$

Зауважимо, що балансувальна ємність вантажу дорівнює статичній незрівноваженості ротора.

### 5. 1. 2. Безрозмірні диференціальні рівняння руху системи, режим автобалансування

Безрозмірні диференціальні рівняння руху системи мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \ddot{\alpha} + \beta \dot{\alpha} - \left[ (\ddot{u} - 2n\dot{v} - n^2 u) \sin \alpha - (\ddot{v} + 2n\dot{u} - n^2 v) \cos \alpha \right] = 0, \\ L_u &= \ddot{u} - 2n\dot{v} - n^2 u + b(\dot{u} - nv) + u - \varepsilon \left[ n^2 + \ddot{\alpha} \sin \alpha + (\dot{\alpha} + n)^2 \cos \alpha \right] = 0, \\ L_v &= \ddot{v} + 2n\dot{u} - n^2 v + b(\dot{v} + nu) + v - \varepsilon \left[ -\ddot{\alpha} \cos \alpha + (\dot{\alpha} + n)^2 \sin \alpha \right] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) введені такі безрозмірні час ( $\tau$ ), змінні ( $u, v$ ) і параметри ( $n, \beta, b$ )

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_0 t, \quad u = \frac{x}{\kappa l}, \quad v = \frac{y}{\kappa l}, \quad n = \frac{\omega}{\omega_0}, \\ \beta &= \frac{\tilde{\beta}}{\kappa m \omega_0}, \quad b = \tilde{b} / (\omega_0 M_{\Sigma}), \quad \varepsilon = m / (\kappa M_{\Sigma}), \end{aligned} \quad (3)$$

точкою позначається похідна за безрозмірним часом і для кулі  $\kappa = 7/5$ , ролика  $\kappa = 3/2$ , маятника  $\kappa = 1 + I_C / (ml^2)$ .

На стаціонарних рухах

$$\tilde{\alpha}, \tilde{u}, \tilde{v} = \text{const} \quad (4)$$

і рівняння (2) приймають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{(0)} &= n^2 (\tilde{u} \sin \tilde{\alpha} - \tilde{v} \cos \tilde{\alpha}) = 0, \\ L_u^{(0)} &= \tilde{u} (1 - n^2) - bn\tilde{v} - \varepsilon n^2 (1 + \cos \tilde{\alpha}) = 0, \\ L_v^{(0)} &= (1 - n^2) \tilde{v} + bn\tilde{u} - \varepsilon n^2 \sin \tilde{\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система рівнянь (5) допускає розв'язок

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0, \quad \tilde{\alpha} = \pi. \quad (6)$$

Це – основний усталений рух. На ньому вантаж синхронно обертається з ротором, займає положення навпроти незрівноваженої маси і балансує її. При цьому вал суміщений з віссю обертання.

### 5. 1. 3. Лінеаризація диференціальних рівнянь руху, характеристичне рівняння

Розглядаємо (6) як незбурений рух. Введемо у розглядання збурений рух

$$u, v, \alpha = -\pi + \gamma, \quad (7)$$

де  $u, v, \gamma$  – збурення, причому  $|u|, |v|, |\gamma|, |\dot{u}|, |\dot{v}|, |\dot{\gamma}| \ll 1$ .

Підставляємо (7) в (2). Після лінеаризації знаходимо наступні рівняння першого наближення

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \ddot{\gamma} + \beta \dot{\gamma} - (\ddot{v} + 2n\dot{u} - n^2 v) = 0, \\ L_u &= \ddot{u} - 2n\dot{v} - n^2 u + b(\dot{u} - nv) + u + 2\varepsilon n \dot{\gamma} = 0, \\ L_v &= \ddot{v} + 2n\dot{u} - n^2 v + b(\dot{v} + nu) + v - \varepsilon (\ddot{\gamma} - n^2 \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda^2 + \beta\lambda, \quad a_{12} = -2n\lambda, \quad a_{13} = -(\lambda^2 - n^2), \\ a_{21} &= -\varepsilon a_{12}, \quad a_{22} = \lambda^2 + b\lambda + 1 - n^2, \quad a_{23} = -n(2\lambda + b), \end{aligned}$$

$$a_{31} = \varepsilon a_{13}, \quad a_{32} = -a_{23}, \quad a_{33} = a_{22}. \quad (9)$$

Тоді, характеристичне рівняння системи набуде вигляду

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -\varepsilon a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \varepsilon a_{13} & -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}^2 + a_{23}^2) + \varepsilon[a_{22}(a_{12}^2 - a_{13}^2) + 2a_{12}a_{13}a_{23}] = 0. \quad (10)$$

Характеристичне рівняння у вигляді полінома

$$\Delta(\lambda) = a_0 \lambda^6 + a_1 \lambda^5 + \dots + a_5 \lambda + a_6 = 0, \quad (11)$$

де

$$a_0 = 1 - \varepsilon, \quad a_1 = \beta + (2 - \varepsilon)b,$$

$$a_2 = (2 - \varepsilon)(n^2 + 1) + b(b + 2\beta),$$

$$a_3 = 2bn^2\varepsilon + \beta b^2 + 2(n^2 + 1)(b + \beta),$$

$$a_4 = (n^2 - 1)^2 + \varepsilon n^2(n^2 + 6) + 2\beta b(n^2 + 1) + b^2 n^2,$$

$$a_5 = \beta(n^2 - 1)^2 + bn^2(3\varepsilon n^2 + \beta b), \quad a_6 = \varepsilon n^4(n^2 - 1). \quad (12)$$

З (12) видно, що при обертанні ротора з резонансною кутовою швидкістю у характеристичного рівняння (11) з'являється один нульовий корінь. Тому кутова швидкість  $n=1$  підозрюється на першу характерну швидкість. При її переході основний рух повинен набувати стійкості. Це за умови, що решта коренів характеристичного рівняння (11) буде мати від'ємну дійсну частину.

З (12) видно, що якщо існують інші характерні швидкості, більші за 1, то при обертанні ротора з цими швидкостями у характеристичного рівняння (11) повинна бути принаймні одна пара чисто уявних коренів.

## 5. 2. Дослідження стійкості основного руху за відсутністю сил опору

При відсутності сил опору  $\beta=b=0$  і характеристичне рівняння (11) приймає вигляд

$$\Delta = a_0 x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6, \quad (13)$$

де



$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 - \varepsilon, \quad a_2 = (2 - \varepsilon)(n^2 + 1), \\
a_4 &= (n^2 - 1)^2 + \varepsilon n^2(n^2 + 6), \\
a_6 &= \varepsilon n^4(n^2 - 1), \quad x = \lambda^2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Необхідною умовою стійкості основного руху є умова від'ємності всіх коренів полінома (13). Загальновідомо, що для того, щоб всі корені полінома (13) були від'ємні, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

$$\begin{aligned}
a_j &> 0 \quad (j = 0, 2, 4, 6); \\
p(n, \varepsilon) &= -a_2^2 a_4^2 + 4a_2^3 a_6 + 27a_0^2 a_6^2 - 18a_0 a_2 a_4 a_6 + 4a_0 a_4^3 \leq 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

З першої групи умов в (15) знаходимо першу критичну швидкість

$$n_1(\varepsilon) = 1, \tag{16}$$

яка збігається з резонансною частотою. Зауважимо, що остання умова в (15) виконується, бо

$$\forall \varepsilon > 0: p(1, \varepsilon) = -196\varepsilon^2(8\varepsilon^2 - 11\varepsilon + 4) < 0. \tag{17}$$

Інші швидкості за допомогою метода розкладання коренів полінома за степенями малого параметра [18] будемо шукати у вигляді рядів. У явному вигляді поліном  $p(n, \varepsilon)$  має вигляд

$$p(n, \varepsilon) = c_0 n^{10} + c_2 n^8 + \dots + c_8 n^2 + c_{10}, \tag{18}$$

де

$$\begin{aligned}
c_0 &= -16(1 - 2\varepsilon)^4 < 0, \quad c_2 = 8(8 - \varepsilon - 14\varepsilon^2)(1 - 2\varepsilon)^2, \\
c_4 &= -8(12 - 55\varepsilon + 140\varepsilon^2 - 192\varepsilon^3 + 104\varepsilon^4), \\
c_6 &= 64 - 344\varepsilon + 567\varepsilon^2 - 296\varepsilon^3 - 32\varepsilon^4, \\
c_8 &= -2(8 - 20\varepsilon + 11\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3), \quad c_{10} = -\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

Розкладання дійсних коренів полінома (18) мають вигляд  
– для  $0 < \varepsilon < 0.05$

$$n_2(\varepsilon) = 1 + \frac{49}{32}\varepsilon + \frac{12397}{4096}\varepsilon^2 + \frac{12955649}{2097152}\varepsilon^3 \dots,$$

$$n_3(\varepsilon) = 1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{7}{3}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{29}{8}\frac{\varepsilon}{4} + \frac{5119}{648}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\frac{4}{3}} + \dots; \quad (20)$$

– для  $0.05 \leq \varepsilon < 0.5$

$$n_{2/3}(\varepsilon) = \frac{1}{8q^2} \left( 1 \mp 2q + \frac{11}{2}q^2 \pm \frac{37}{4}q^3 - \frac{155}{8}q^4 + \dots \right),$$

$$q = \sqrt{(1 - 2\varepsilon)/8}. \quad (21)$$

На рис. 2 у площині  $(n, \varepsilon)$  безрозмірних параметрів системи побудовані точні графіки характерних швидкостей обертання ротора. Характерні швидкості є межами двох областей стійкості  $A$  і  $B$  основного руху в площині.

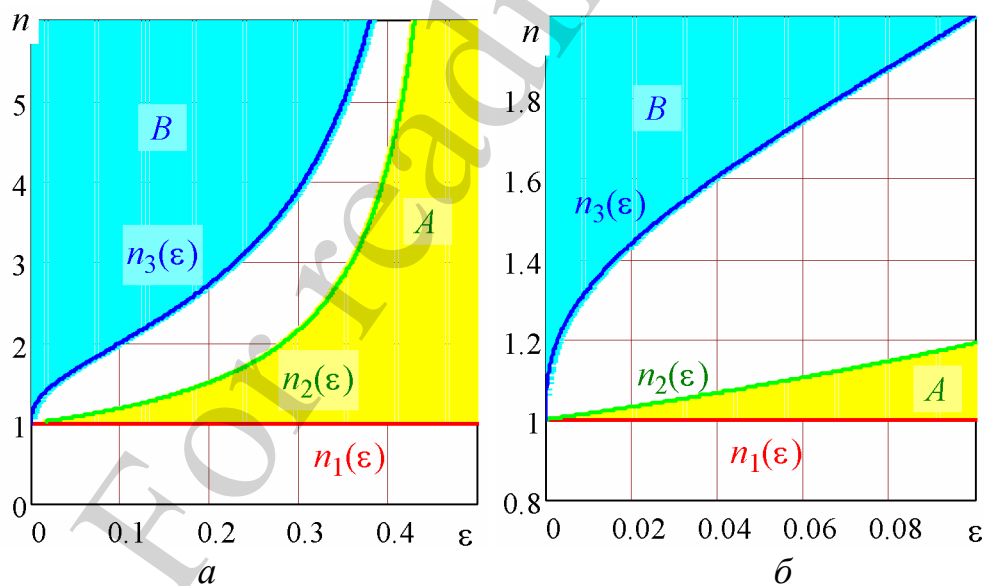


Рис. 2. Характерні швидкості і області стійкості основного руху у випадку відсутності сил опору:  $a$  – на всьому інтервалі зміни  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 0.5$ );  $b$  – для  $0 < \varepsilon < 0.1$ ;  $A$  – перша,  $B$  – друга області стійкості основного руху

Обчислення показують, що похибка розкладань (20) чи (21) не перевищує 7 %. При цьому найбільша похибка – на віддалі від 0 чи 0.5.

Таким чином, для будь-якого  $\varepsilon \in (0, 0.5)$  у системи три характерні швидкості. При наближенні  $\varepsilon$  до 0.5 друга і третя характерні швидкості необмежено

зростають. При цьому випадок  $\varepsilon=0.5$  має тільки теоретичне значення, бо його не можна реалізувати і на практиці  $\varepsilon \ll 1$ .

### 5. 3. Дослідження стійкості основного руху за наявності сил опору

#### 5. 3. 1. Дослідження стійкості основного руху за розкладаннями коренів характеристичного рівняння

Нижче одержуються розкладання коренів характеристичного рівняння (11) при різному співвідношенні малості між безрозмірними параметрами системи. Такий прийом досліджень є стандартним [13].

1. Випадок, коли маса вантажу набагато менша маси ротора  $\varepsilon \ll 1$ :

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - in + O(\varepsilon), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}, \quad \lambda_5 = -\beta + O(\varepsilon),$$

$$\lambda_6 = -\frac{\varepsilon n^4 (n^2 - 1)}{\beta \left[ (n^2 - 1)^2 + b^2 n^2 \right]} + O(\varepsilon^2). \quad (22)$$

2. Випадок великих сил внутрішнього опору  $\beta \gg 1$ :

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - in + O\left(\frac{1}{\beta}\right),$$

$$\lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}, \quad \lambda_5 = -\frac{\beta}{1 - \varepsilon} + O(1),$$

$$\lambda_6 = -\frac{\varepsilon n^4 (n^2 - 1)}{\beta \left[ (n^2 - 1)^2 + b^2 n^2 \right]} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right). \quad (23)$$

3. Випадок, коли маса вантажу набагато менша маси ротора і малі сили внутрішнього опору  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\beta \sim \sqrt{\varepsilon}$ :

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - in + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2},$$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{\beta}{2} \pm \left\{ \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\varepsilon n^4 (n^2 - 1)}{(n^2 - 1)^2 + b^2 n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon). \quad (24)$$

4. Випадок, коли маса вантажу набагато менша маси ротора і ротор швидко обертається  $\varepsilon \ll 1$ ,  $n \sim 1/\varepsilon$ :

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - in + O(\varepsilon), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2},$$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{\beta}{2} \pm i\sqrt{\varepsilon n} + O(\varepsilon). \quad (25)$$

5. Випадок, коли маса вантажу набагато менша маси ротора і малі сили опору  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\beta, b \sim \varepsilon$ :

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2} + i(1 \pm n) + \frac{i\varepsilon}{4(1 \pm n)^2} + O(\varepsilon^2), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2},$$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{\beta}{2} \pm i\sqrt{\frac{\varepsilon}{n^2 - 1}}n^2 + O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right). \quad (26)$$

6. Випадок, коли ротор швидко обертається  $n \gg 1$ :

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - in + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2},$$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{\beta + \varepsilon b}{2(1 - \varepsilon)} \pm in\sqrt{\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (27)$$

Одержані розкладання застосовні для наближеного визначення коренів характеристичного рівняння (11) на віддалі від резонансної швидкості ( $|n-1| > 0$ ). Відповідно до розкладань режим автобалансування асимптотично стійкий на зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $n > 1$ ), а на дорезонансних – нестійкий.

Розкладання коренів не дозволяють визначити кількість і величини характерних швидкостей обертання ротора, але дозволяють зробити такі висновки:

- характерних швидкостей може бути одна чи непарна кількість;
- при прямуванні  $\varepsilon$  до нуля всі характерні швидкості прямують до резонансної швидкості обертання ротора ( $n=1$ );
- при переході швидкістю обертання ротора непарної характерної швидкості автобалансувальний режим набуває стійкості, а при переході парної – втрачає.

### 5. 3. 2. Вплив на характерні швидкості сил опору

При обертанні ротора з другою чи третьою характерними швидкостями у характеристичного рівняння (11) появляється пара чисто уявних коренів. Підставля-

ємо в (11) шуканий уявний корінь  $\lambda=i\mu$ , де  $\mu$  – дійсне число. Виділяємо окремо дійсні і уявні складові. Одержуємо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(x) &= a_0 - a_2x + a_4x^2 - a_6x^3, \\ \operatorname{Im}(x) / x &= a_1 - a_3x + a_5x^2, \quad x = \mu^2 > 0.\end{aligned}\quad (28)$$

З системи рівнянь (28) визначаємо дійсні додатні  $x$  і відповідні дійсні додатні критичні швидкості. Розв'язок розшукується у вигляді

$$\begin{aligned}x &= x_0 + x_q\varepsilon^q + x_{2q}\varepsilon^{2q} + \dots, \\ n &= 1 + n_p\varepsilon^p + n_{2p}\varepsilon^{2p} + \dots,\end{aligned}\quad (29)$$

де  $q, p$  – раціональні числа.

У випадку, коли маса вантажу набагато менша маси ротора і малі сили опору ( $\varepsilon, b, \beta \ll 1$ ) знайдені такі розкладання:

$$\begin{aligned}x_2 &= \varepsilon \frac{3b}{4(b+\beta)} + O(\varepsilon^2), \\ n_2(\varepsilon, b, \beta) &= 1 + \varepsilon \left[ \frac{49}{32} - \frac{(b+7\beta)^2}{32(b+\beta)} \right] + O(\varepsilon^2); \\ x_3 &= \left[ \frac{\beta(b+\beta)}{4b^2} \right]^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}} + O(\varepsilon), \\ n_3(\varepsilon, b, \beta) &= 1 + \left[ \frac{(b+\beta)^2}{2b\beta} \right]^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{1}{3}} + O\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right).\end{aligned}\quad (30)$$

Порівняння розкладань (30) і (20) показує, що невеликі сили в'язкого опору не змінюють порядок малості другої і третьої характерних швидкостей відносно малого параметра  $\varepsilon$ . При цьому невеликі сили опору зменшують другу і збільшують третю характерну швидкість, причому величина зміни залежить від відношення між  $b$  і  $\beta$  (а не кожного параметра окремо).

Подальші пошуки розкладань показують, що у випадку, коли сили опору кінцеві (еквівалентні  $1:b, \beta \sim 1$ ) не існує розкладань вигляду (30) і відповідних характерних швидкостей. Режим автобалансування асимптотично стійкий на резонансних швидкостях обертання ротора.

## 6. Обговорення одержаних результатів з аналітичного дослідження умов настання автобалансування

Побудована математична модель розглядуваної механічної системи, що однакова для маятників, куль чи роликів. Динаміку механічної системи характеризують 4 безрозмірних параметра (3). У системі існує єдиний автобалансувальний режим руху (6). На його (звичайну) стійкість за відсутністю сил опору впливають безрозмірна швидкість обертання ротора  $n$  і відношення маси вантажу до маси всієї системи –  $\varepsilon$ . За наявності сил опору в системі на стійкість руху ще впливають безрозмірні коефіцієнти  $b$ ,  $\beta$ , що характеризують величини зовнішніх і внутрішніх сил в'язкого опору.

За відсутністю сил опору в системі ( $b=\beta=0$ ) у неї три характерні швидкості обертання ротора і режим автобалансування стійкий, коли швидкість обертання ротора знаходяться між першою і другою чи над третьою характерними швидкостями. Перша характерна швидкість співпадає з резонансною частотою. При зменшенні  $\varepsilon$  друга і третя характерні швидкості прямують до резонансної швидкості обертання ротора.

Слід звернути увагу, що:

- третя характерна швидкість із збільшенням малого параметру  $\varepsilon$  стрімко зростає через пропорційність  $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ ;

- через малу першу область стійкості ( $A$ ) при  $\varepsilon \ll 1$  автобалансир можна застосовувати тільки на швидкостях обертання ротора, що перевищують третю характерну швидкість (рис. 2, б).

Невеликі сили опору в системі не змінюють якісну поведінку системи, але зменшують другу і збільшують третю характерну швидкість. При цьому величина зміни залежить від відношення між  $b$  і  $\beta$  (а не кожного параметра окремо). Із збільшенням сил опору кількість характерних швидкостей зменшується до однієї, і ця швидкість дорівнює резонансній швидкості обертання ротора.

Одержані умови настання автобалансування застосовні і для автобалансирів з багатьма вантажами. Проте вони стають необхідними (але не достатніми) через те, що складений вантаж кінематично може розпадатися на окремі вантажі, що не враховує використана модель.

Розглянуту задачу можна розв'язати аналітично ще повніше. В цьому і є сенс модельної задачі. Нові результати будуть поглиблювати вже одержані теоретичні знання про явище автобалансування.

В подальшому планується аналітично розв'язати низку інших модельних задач, що мають значення для розуміння процесу автобалансування.

## 7. Висновки

1. У розглянутій роторній системі з автобалансиrom існує один єдиний автобалансувальний режим руху. На його стійкість за відсутністю сил опору впливають швидкість обертання ротора і відношення маси вантажу до маси всієї системи. За наявності сил опору в системі на стійкість руху ще впливають (безрозмірні) коефіцієнти, що характеризують величини зовнішніх і внутрішніх сил опору.

2. За відсутністю сил опору в системі у неї три характерні швидкості обертання ротора, причому найменша співпадає з резонансною швидкістю обертання ротора. Режим автобалансування стійкий при обертання ротора з швидкостями, що знаходяться між першою і другою чи над третьою характерними швидкостями. При зменшенні відношення маси вантажу до маси системи друга і третя характерні швидкості прямують до резонансної швидкості обертання ротора.

3. Невеликі сили опору в системі не змінюють якісну поведінку системи. При цьому невеликі сили опору зменшують другу і збільшують третю характерну швидкість, причому величини зміни швидкостей залежать від відношення між  $b$  і  $\beta$  (а не кожного параметра окремо). Із збільшенням сил опору кількість характерних швидкостей зменшується до однієї, і ця швидкість співпадає з резонансною швидкістю обертання ротора.

### Подяки

Стаття фінансується за рахунок наукової роботи № 0119U001173 «Стабілізація і стійкість руху неврівноваженого обертового несучого тіла у вільному або ізольованій механічній системі» (Stabilization and stability of motion of an unbalanced rotating carrying body in a free or isolated mechanical system), що виконується в Центральнотехнічному національному університеті за рахунок коштів загального фонду державного бюджету.

### Література

1. Thearle, E. L. (1950). Automatic dynamic balancers (Part 2 – Ring, pendulum, ball balancers). *Machine Design*, 22 (10), 103–106.
2. Муйжніек, А. И. (1959). Некоторые вопросы теории автоматической динамической балансировки. *Вопросы динамики и прочности*, 6, 123–145.
3. Блехман, И. И. (1981). Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 352.
4. Детинко, Ф. М. (1956). Об устойчивости работы автобалансира для динамической балансировки. *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*, 4, 38–45.
5. Артюнин, А. И. (1993). Исследование движения ротора с автобалансиром. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 1, 15–19.
6. Sommerfeld, A. (1904). Beitrage zum dynamischen Ausbaur der Festigkeitslehre. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 48 (18), 631–636.
7. Филिमонихин, Г. Б. (1996). К устойчивости основного движения двухмаятникового автобалансира. *Доповіді Національної академії наук України*, 8, 74–78. URL: <http://dspace.kntu.kr.ua/jspui/handle/123456789/6796>
8. Green, K., Champneys, A. R., Lieven, N. J. (2006). Bifurcation analysis of an automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors. *Journal of Sound and Vibration*, 291 (3-5), 861–881. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.06.042>
9. Bogdevicius, M., Janutėnienė, J. (2010). Influence of Dynamic Viscosity on Automatic Dynamic Balance. *Solid State Phenomena*, 164, 127–132. doi: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ssp.164.127>

10. Artyunin, A. I., Eliseyev, S. V. (2013). Effect of “Crawling” and Peculiarities of Motion of a Rotor with Pendular Self-Balancers. *Applied Mechanics and Materials*, 373-375, 38–42. doi: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.373-375.38>
11. Lu, C.-J., Tien, M.-H. (2012). Pure-rotary periodic motions of a planar two-ball auto-balancer system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 32, 251–268. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.06.001>
12. Gorbenko, A. N. (2003). On the Stability of Self-Balancing of a Rotor with the Help of Balls. *Strength of Materials*, 35, 305–312. doi: <http://doi.org/10.1023/a:1024621023821>
13. Філімоніхін, Г. Б. (2004). Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. Кіровоград: КНТУ, 352.
14. Artyunin, A. I., Barsukov, S. V., Sumenkov, O. Y. (2019). Peculiarities of Motion of Pendulum on Mechanical System Engine Rotating Shaft. *Proceedings of the 5th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2019)*, 649–657. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-22041-9\\_70](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22041-9_70)
15. Filimonikhin, G., Yatsun, V., Filimonikhina, I., Ienina, I., Munshtukov, I. (2019). Studying the load jam modes within the framework of a flat model of the rotor with an auto-balancer. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5 (7 (101)), 51–61. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.177418>
16. Strauch, D. (2009). *Classical Mechanics: An Introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 405. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-73616-5>
17. Ruelle, D. (1989). *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*. Academic Press. doi: <https://doi.org/10.1016/c2013-0-11426-2>
18. Nayfeh, A. H. (1993). *Introduction to Perturbation Techniques*. John Wiley & Sons, Inc., 533.